В # Часа 13

Групи - определение примери основни св-ва

$ax = b$ $ya = b$

Св 1

(i) Неутр елемент e на гр G е !

Св 2

(ii) $\forall a \in G$ има ! обратен a^{-1} в гр-та G

Док

(i) За произв фиксиран елемент $a \in G$ у-то $ax = a$ има ! реш в G по тв-то $\exists$ неутр елемент на G е решение на това у-ние

(ii) За $\forall a \in G$ у-то $ax = e$ има ! реш в G по тв-то. $\exists$ обратни на a са негови решения

Св 2

Нека G е гр, $a, b \in G$ Тогава (i) $(a^{-1})^{-1} = a$; (ii) $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$

Док

(i) у-то $a^{-1}x = e$ има ! реш в G от $a^{-1}a = e$ и $a^{-1}(a^{-1})^{-1} = e \Rightarrow a \in G$ и $(a^{-1})^{-1} \in G$ са негови реш-я т. е. съвпадат $a = (a^{-1})^{-1}$

(ii) у-то $(ab)x = e$ има ! реш в G. От една страна има $(ab)(ab)^{-1} = e$ по деф за обратен на ab. От др стр $(ab)(b^{-1}a^{-1}) \overset{\text{асоц}}{=} a(bb^{-1})a^{-1} = (ae)a^{-1} = aa^{-1} = e$

Следователно $(ab)^{-1}$ и $(b^{-1}a^{-1})$ са реш-я на $(ab)x = e$ в G и съвпадат

Подгрупи, хомоморфизми и изоморфизми на групи. Теорема на Кейли

Деф
Непразното множество H на гр G е подгрупа ако за $\forall a,b \in H$ е в сила $a^{-1}, ab \in H$

Примери за ПГ

1) Ако G е гр то G и $\{e\}$ са подгр на G
$e^{-1} = e$ защото $ee = e$!
2) За $\forall n \in \mathbb{N}$ множеството на $\mathbb{Z} = \{nz \mid z \in \mathbb{Z}\}$ е подгрупа на $(\mathbb{Z}, +)$. Ако H е ПГ на G пишем $H \leq G$ (обозначение) $(\leq, <)$ за б
Кратните на $(n\mathbb{Z}, +) \leq (\mathbb{Z}, +)$
$nz_1 + nz_2 = n(z_1 + z_2) \in n\mathbb{Z}$
$-(nz) = n(-z) \in n\mathbb{Z}$
3) $(\mathbb{Q}, +) \leq (\mathbb{R}, +)$
4) $(\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} \setminus \{0\}) \leq (\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\})$
5) Ако $\forall V$ е ЛП то $\forall$ ЛП W на V е ПГ на $(V, +)$ - адитивната група
$(W, +) \leq (V, +)$
$w_1, w_2 \in W \Rightarrow w_1 + w_2 \in W, -w_1 = -1(w_1) \in W$
6) $SL(n, F) := \{A \in M_{n \times n}(F) \mid \det(A) = 1\}$ е ПГ на общата линейна група $GL(n, F) := \{B \in M_{n \times n}(F) \mid \det(B) \neq 0\}$ над числово поле F, която се нарича специална линейна група
Ако $\forall A_1, A_2 \in SL(n, F)$ то $A_1^{-1} A_1 A_2 \in SL(n, F)$
Тъй като $\det A_1 \neq 0$ тогава $\det(A_1^{-1}) = \frac{1}{\det(A_1)}$ и $\det(A_1 A_2) = \det A_1 \det A_2$

Т6 Непразното ПМ H на гр G е ПГ $\Leftrightarrow$ за $\forall h_1, h_2 \in H$ е в сила $h_1 h_2^{-1} \in H$

Док

Ако H е ПГ на G то за $\forall h_1, h_2 \in H$ знаем че обратният на $h_2 \in H$ Оттук $h_1 h_2^{-1} \in H$

Нека допуснем $h_1 h_2^{-1} \in H$ за $\forall h_1, h_2 \in H$ Тогава $\exists h \in H$ такова че $h h^{-1} = e \in H$

Сега за $e \in H$ и $\forall h \in H$ имаме $e h^{-1} = h^{-1} \in H$

Сега за $\forall h_1, h_2 \in H$ използвайки горе казаното $\Rightarrow h_2^{-1} \in H$ и показвайки че $h_1 (h_2^{-1})^{-1} = h_1 h_2 \in H$

Сл 1

Неутр. елемент на гр G принадлежи на $\forall$ подгрупа $H \leq G$

Сл 2

Непразното ПМ H на гр G е ПГ $\Leftrightarrow$ H е гр относно индуцираната от G операция (образуване и умн)

Лема

Ако $H_\alpha \leq G$ за $\alpha \in A$ и гр G то $\bigcap_{\alpha \in A} H_\alpha$ е ПГ на G

Док

За $\forall h_1, h_2 \in \bigcap_{\alpha \in A} H_\alpha \Rightarrow h_1, h_2 \in H_\alpha \leq G$ за $\forall \alpha \in A$. Следов $h_1 h_2^{-1} \in H_\alpha$ за $\forall \alpha \in A \Rightarrow h_1 h_2^{-1} \in \bigcap_{\alpha \in A} H_\alpha$ и $\bigcap_{\alpha \in A} H_\alpha \leq G$ съгласно Т6-то.

Деф

Изобр $f : G \to H$ на гр G в гр H е хомоморфизъм на групи ако $f(g_1 g_2) = f(g_1) f(g_2)$ за $\forall g_1, g_2 \in G$

$$
\begin{array}{ccc}
G * G & \longrightarrow & G \\
(g_1, g_2) & \longmapsto & g_1 g_2 \\
\downarrow f & & \downarrow f \\
H \times H & \longrightarrow & H \\
(f(g_1), f(g_2)) & \longmapsto & f(g_1) f(g_2)
\end{array}
$$

$f(G \times G) \Rightarrow H * H$

$\Rightarrow$ съответствие с умн. от единствен гр. и гр. група

Пример за хомоморфизми на гр.:

$\det : GL(n, F) \to F^*$

$\det(AB) = \det(A)\det(B)$

Тв.

Ако $f : G \to H$ е хомоморфизъм на групи то:

(i) $f(e_G) = e_H$ за неутр. елем. e_G на G и неутр. елемент e_H на H

(ii) $f(g)^{-1} = f(g^{-1})$ за $\forall g \in G$

Док.

(i) Избираме елемент $g \in G$ използваме за g-то $f(g)x = f(g)$ има единствено реш. в H. От една страна $f(g)f(e_G) = f(g e_G) = f(g)$ т.е. $f(e_G) \in H$ е реш. на $f(g)x = f(g)$. От друга страна $e_H \in H$ е реш. $f(g)x = f(g)$ т.е. $f(e_G) = e_H$

(ii) $f(g)^{-1} = f(g^{-1})$ g-то $f(g)x = e_H$ има единствено реш. $f(g)^{-1} \in H$ в H. Но също $f(g)f(g)^{-1} = f(g g^{-1}) = f(e_G) \overset{ii}{=} e_H$ т.е. $f(g^{-1})$ е реш. на $f(g)x = e_H$ и $f(g)^{-1} = f(g^{-1})$

Деф.

Ако $f : G \to H$ е ХМ на групи, то $\operatorname{Im} f \overset{def}{=} \{f(g) \mid g \in G\}$ е наричана образ на f.

Лема
Ако $f: G \to H$ е ХМ на групи то образът $\operatorname{Im} f \leq H$ е ПГ на H

Док
Достатъчно е да отбележим че $\forall f(a), f(b) \in \operatorname{Im} f$, $a, b \in G$, е в сила $f(a) f(b)^{-1} = f(a) f(b^{-1}) \overset{\text{ХМ}}{=} f(ab^{-1}) \in \operatorname{Im} f$ □

Деф изоморфизъм на групи
Взаимно еднозначните ХМ-зми на групи $f: G \to H$ се наричат изоморфизми на групи

Пример за изоморфизми на групи
Нека $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$. Тогава умножението $\mu_n: (\mathbb{Z}, +) \to (n\mathbb{Z}, +)$ с $\mu_n(z) = nz$ за $\forall z \in \mathbb{Z}$ е ХМ на групи
От $\mu_n(z_1 + z_2) = n(z_1 + z_2) = nz_1 + nz_2 = \mu_n(z_1) + \mu_n(z_2) \Rightarrow \mu_n$ е ХМ на групи
~~μ_n е взаимно еднозначно сб~~
$\mu_n^{-1}: n\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $\mu_n^{-1}(nz) = \frac{nz}{n} = z$ за $\forall z \in \mathbb{Z}$

Т6
Ако $f: G \to H$ е изоморфизъм на групи то $f^{-1}: H \to G$ е ХМ, а оттам и ИЗМ на групи

Док
Трябва да проверим че $f^{-1}(h_1 h_2) = f^{-1}(h_1) f^{-1}(h_2)$ за $\forall h_1, h_2 \in H$. Съгласно взаимната еднозначност на изображението $f: G \to H$ условието $g_1 = g_2$ за $g_1, g_2 \in G$ е еквивалентно на условието $f(g_1) = f(g_2)$

Предложение тогда факт ако
~~$g_1 := \varphi^{-1}(h_1)$ и нека $\varphi(g_1) = h_1$ $g_2 := \varphi^{-1}(h_2)$~~
$g_1 := \varphi^{-1}(h_1)\varphi^{-1}(h_2) \in G$ и $g_2 := \varphi^{-1}(h_1h_2)$. По-
нататък от $\varphi(g_1) = \varphi(\varphi^{-1}(h_1)\varphi^{-1}(h_2)) \overset{\text{хом}}{=}$
$(\varphi\varphi^{-1}(h_1))(\varphi\varphi^{-1}(h_2)) = h_1h_2 = \varphi\varphi^{-1}(h_1h_2) =$
$\varphi(g_2) \Rightarrow$ ако $\varphi^{-1}(h_1)\varphi^{-1}(h_2) = g_1 = g_2 =$
$\varphi^{-1}(h_1h_2)$ □

Теорема на Кейли
Всяка група G от ред $|G| = n$ е
изоморфна на ПГ на симетричната
група S_n

Док:
За произволно $g \in G$ разгледаме
лявата транслация $L_g: G \to G$
$L_g(x) = gx$ за $\forall x \in G$ Ясно
Ако $L_g(x_1) = gx_1 = gx_2 = L_g(x_2)$ то след лява
почленно умн с g^{-1} имаме
$x_1 = ex_1 = (g^{-1}g)x_1 = g^{-1}(gx_1) = g^{-1}(gx_2) = (g^{-1}g)x_2 = ex_2 = x_2$
Следов L_g транспортира произволни
$x_1, x_2 \in G$, $x_1 \neq x_2$ в $L_g(x_1) \neq L_g(x_2)$ и мн-во
$\{L_g(x) = gx \mid x \in G\}$ е
състои от $|G| = n$ елемента. Това мн-во
е съвпада и отами съвпада с G
следователно $L_g = G \to G$ е
взаимно еднозначно изображ на
G в себе си. Симетричната група
S_n се състои от всички еднозначните
изображения $\sigma: \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}$
Бинарната опер в S_n е последо-
вателното прилагане

Нека множеството $G = \{1, \dots, n\}$, т.е. можем да разглеждаме $S_n = Sym(G)$ като групата на G спрямо композиране. Дефинираме $L: G \to Sym(G)$, $g \in G \mapsto l_g \in Sym(G)$

Ако $g_1, g_2 \in G$ и $l_{g_1} = l_{g_2}$, то $l_{g_1}(e) = l_{g_2}(e)$, т.е. $g_1 = g_2$. Тъй като $g_1 \neq g_2$ имаме $l_{g_1} \neq l_{g_2}$. Следователно $L: G \to \{l_g \mid g \in G\}$ е бijективно изображение.

Освен това, $l_{g_1 g_2} = l_{g_1} l_{g_2}$ т.к. за $\forall x \in G$ имаме $l_{g_1} l_{g_2} x = l_{g_1}(l_{g_2} x) = g_1(g_2 x) = (g_1 g_2)x = l_{g_1 g_2}(x)$ т.е. L е хом. на групи, а оттам и изом. на групи. $L: G \to \operatorname{Im} L = \{l_g \mid g \in G\}$. Тук $\operatorname{Im} L$ е ПГ на $Sym(G) = S_n$.

~~Ред на елемент~~

Ред на елемент

Нека G е гр., $g \in G$, $m \in \mathbb{Z}$. Ако $m \neq 0$ полагаме $sign(m) := \begin{cases} 1 & \text{за } m > 0 \\ -1 & \text{за } m < 0 \end{cases}$

Определяме $g^m := \begin{cases} e & \text{за } m = 0 \\ \underbrace{g^{sign(m)} \cdot \dots \cdot g^{sign(m)}}_{(m)} & \text{за } m \neq 0 \end{cases}$